LIMITI DI FUNZIONI A 2 VARIABILI

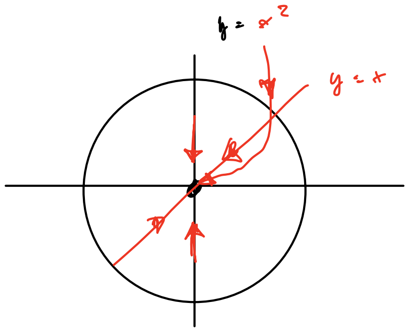
ESEMPI

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f è continua? controllare se f è continua in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$



1^a strada : $f(0,y) = 0$ se c'è il limite è 0

2^a strada : $f(x,x) = \dfrac{x^3}{x^4+x^2} = \dfrac{x}{1+x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$

3^a strada : $f(x,x^2) = \dfrac{x^4}{x^4+x^4} = \dfrac{\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow{x\to 0} 1/2$

il limite non esiste $\to$ f non è continua

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f continua se lo è nell'origine $\to \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$|f(x,y)| \to 0 \quad (x,y) \to (0,0)$

$|f(x,y)| \leq g(y) \xrightarrow{y\to 0} 0$

oppure

$g(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$

$$\left|\frac{x y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|\,|y|^3}{x^2+y^2} = y^2 \frac{|x|\,|y|}{x^2+y^2}$$

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2) \longrightarrow$ SEMPRE VERO

$2ab \leq a^2+b^2 \longrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0$

$(a-b)^2 \geq 0$ SEMPRE

$a = |x|$
$b = |y|$

$$\leq y^2 \frac{1}{2} \frac{\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$g(y) \xrightarrow{y \to 0} 0 \quad \boxed{\text{OK}}$$

CALCOLO DIFFERENZIALE

- COSA SIGNIFICA "DERIVARE" UNA FUNZIONE A PIÙ VARIABILI?

$f(x,y) = 3x^2y^4 - xy^2 \qquad D: \mathbb{R}^2$

FACCIO FINTA $y = c$

$= 3 \cdot 2 \cdot x \cdot y^4 - 1 \cdot y^2$

$= 6xy^4 - y^2 \longrightarrow$ DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$f_y(x,y) = 12y^3x^2 - 2yx \longrightarrow$ DERIVATA PARZIALE RISPETTO A y

- **DEFINIZIONE :**

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

D APERTO $\qquad (x_0, y_0) \in D$

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

QUANDO f AMMETTE IN UN PUNTO (x_0, y_0) ENTRAMBE LE DERIVATE PARZIALI

ALLORA

$\Rightarrow \vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \left(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)\right) \in \mathbb{R}^2$ VETTORE GRADIENTE

ESEMPIO

$$f(x,y) = y^2 \sin(xy) + e^{x^2-y} \qquad D = \mathbb{R}^2$$

$$f_x(x,y) = y^3 \cos(xy) + e^{x^2-y} \cdot 2x$$

$$f_y(x,y) = \underbrace{\quad\bullet\quad}_{2y \sin(xy) + y^2 \cos(xy) \cdot x} + e^{x^2-y} \cdot -1$$

PER CASA

$$f(x,y,z) = \frac{x}{1+z^2} + \sin(xy + 1 - z)$$

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ D APERTO

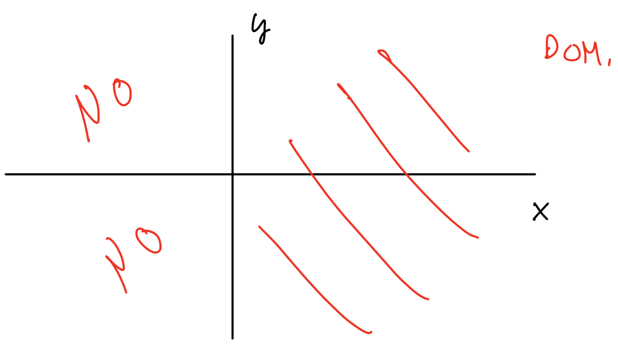
f DERIVABILE SE AMMETTE DERIVATE PARZIALI IN OGNI PUNTO DI D

$f \in C^1(D)$ SE f DERIVABILE E $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ SONO FUNZIONI CONTINUE SU D

ESEMPIO INSIDIOSO

$f(x,y) = y\sqrt{x}$ D : $x \geq 0$

D CHIUSO



$f_x(x,y) = y/2\sqrt{x}$ NON DAPPERTUTTO ESISTE $(0,y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\boxed{NO}$

$f_y(x,y) = \sqrt{x}$ SUL DOMINIO D ESISTE DAPPERTUTTO ? $\boxed{SI}$

APPLICO DEF.

PRENDIAMO IN $(0,0)$

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \frac{0-0}{h} = 0/h = 0 \xrightarrow{h \to 0} 0$$

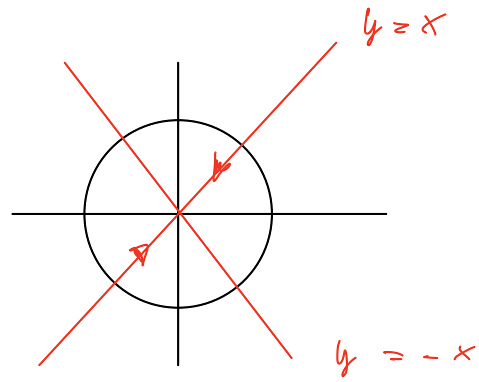
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

MI PONGO IL PROBLEMA DELLA CONTINUITÁ NELL'ORIGINE



$1: \quad f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \to 1/2$

$2: \quad f(x,-x) = \dfrac{-x^2}{2x^2} = -\dfrac{1}{2} \to -1/2$

2 VAL. DIVERSI → IL LIMITE NON ESISTE (NON È UNICO)

↳ f NON È CONTINUA IN $(0,0)$ → CON 2 VAR. NON È VERO

- UNA FUNZIONE $f(x,y)$ PUÓ AVERE ENTRAMBE LE DERIV. PARZIALI IN (x_0,y_0) E ALLO STESSO TEMPO NON ESSERE CONTINUA IN (x_0,y_0)

$\exists f_x(0,0)$? APPLICO DEFINIZIONE!

$$\frac{f(\overset{x_0+h}{h},0) - f(0,0)}{h} \to \frac{0-0}{h} = 0 \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$$

- PER LA FUNZIONE A 1 VAR. IL CONCETTO DI DERIV. E DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO SONO SINONIMI
- PER FUNZIONI 2 O PIÚ VAR. f DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO È PIÚ FORTE DI: $\exists f_x(x_0,y_0), \exists f_y(x_0,y_0)$

RETTA TANGENTE A f IN x_0

$$\to f(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + \varepsilon(h)$$

$h = x - x_0$ VALIDO TANTO PIÚ x È VICINO A x_0 $(h \to 0)$

$h \to \varepsilon(h) \qquad \dfrac{\varepsilon(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$